

## Probabilidade 2 - ME310 - Lista 5

November 3, 2012

### Lembrando:

1. Convergência de seqüências em  $L^p$  (também chamada de convergência em média): se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|X_n - X_0|^p) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então a seqüência definida por  $X_n$  é dita convergente para  $X_0$  em  $L^p$  ( $X_n \xrightarrow{L^p} X_0$ )
2. Convergência em probabilidade: se  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X_0| \geq \epsilon) \rightarrow 0$  com  $0 < \epsilon$  dado, quando  $n \rightarrow \infty$ , então a seqüência definida por  $X_n$  é dita convergente para  $X_0$  em probabilidade ( $X_n \xrightarrow{prob.} X_0$ ). Outra maneira equivalente de escrever é:  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X_0| < \epsilon) \rightarrow 1$
3. Convergência quase certa: se  $P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$  então  $X_n \xrightarrow{q.c.} X$  ( $X_n$  é dito convergente quase certamente para  $X$ ). Essa talvez seja a convergência mais complicada dentre as estudadas, tenha em mente que SE sabemos  $X_n(\omega)$  (relacionar a distribuição com os valores do espaço amostral), então basta mostrar que o conjunto de  $\omega$  para os quais  $X_n \rightarrow X$  tem probabilidade 1 (há um número finito de  $\omega$  para os quais não vale  $X_n \rightarrow X$ ). Caso não saibamos à priori identificar  $X_n$  em função de  $\omega$  podemos usar (5) o lema de Borel-Cantelli da seguinte forma: Seja  $\epsilon > 0$  e  $A_n = \{|X_n - X| > \epsilon\}$ , calculamos  $P(A_n)$ , Se  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$  então com probabilidade 1, um número finito dos eventos  $A_n$  vai ocorrer, ou seja, para todo  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $N$  tal que, para todo  $n \geq N$  temos que  $A_n$  não ocorre (ou seja,  $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ ). Se caso contrario,  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \rightarrow \infty$  e os eventos são independentes, então com prob. 1 existe subsequência infinita  $n_1, n_2, \dots$  tal que  $A_{n_i}$  ocorre, ou seja,  $|X_{n_i} - X| > \epsilon \implies X_n$  não converge para  $X$  quase certamente.
4. Convergência em distribuição: se  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) = F_X(a) \forall a$ , então  $X_n$  é dito convergente em distribuição para  $X$  para todo  $a$  onde  $F_x(a)$  é contínua
5. Lema de Borel-Cantelli: Seja um evento  $\{A_n\}$  com probabilidade de ocorre  $P(A_n) = h(n)$ , se  $\sum h(n) \rightarrow +\infty$  e os eventos são independentes o evento ocorre um número infinito de vezes; se  $\sum h(n) \rightarrow \text{constante}$  o evento ocorre um número finito de vezes; (e se  $\sum h(n) \rightarrow -\infty$ , você errou alguma coisa...  $P(A_n) = h(n) \geq 0$ )

6. Limite fundamental:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{k}{n})^n = e^k$
7. LEI DOS GRANDES NÚMEROS: Seja uma seqüência  $\{X_n, n \geq 1\}$  de variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , vamos definir  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  e  $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$ ,  $A_n = \mathbf{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i$
- Lei fraca dos grandes números: dizemos que  $\{X_n, n \geq 1\}$  satisfaz a lei fraca dos grandes números se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} - \frac{A_n}{n} \xrightarrow{Prob.} 0$
  - Lei forte dos grandes números: dizemos que  $\{X_n, n \geq 1\}$  satisfaz a lei forte dos grandes números se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} - \frac{A_n}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$
8. Teorema de Kolmogorov:
- $\{X_n, n \geq 1\}$  uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d.. A existência de  $\mathbf{E}(|X_1|)$  é condição necessária e suficiente para que a seqüência  $\{X_n\}$  satisfaça a lei forte dos grandes números e  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \mu$ , onde  $\mu = \mu_1$
  - (Outro teorema de Kolmogorov): Seja  $\{X_n, n \geq 1\}$  uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com segundo momento finito e  $Var(X_n) < \infty$  se  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty$  então  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \frac{\mathbf{E}(S_n)}{n}$
9. Sequências que são transformações de seqüências convergentes: Sejam as seqüências  $\{X_n, n \geq 1\}$  e  $\{Y_n, n \geq 1\}$  que satisfazem o teorema de Kolmogorov, defina uma seqüência que seja função delas  $\{f(X_n, Y_n)\}$  então  $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{q.c.} f(\mu_X, \mu_Y)$  se  $f(\mu_X, \mu_Y) < \infty$
10. TEOREMA DO LIMITE CENTRAL: Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  um conjunto de  $n$  variáveis independentes cada uma com média  $\mu_i$  e variância finita  $\sigma_i^2$ . Então:
- $$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \sim N(0, 1)$$
- Outra forma (bastante útil) de enunciar o TLC é dizer que  $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(X - \mu) \xrightarrow{d} N(0, 1)$ ; em que  $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
11. Implicações:  $L^p \implies prob. \implies distrib. \text{ e } q.c. \implies prob. \implies distrib.$
12. Manipulações em Variáveis com distribuição normal: Sejam  $X \sim N(\mu_X; \sigma_X^2)$ ;  $Y \sim N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$  e  $k$  constante então:
- $V = kX \sim N(k \cdot \mu_X; k^2 \cdot \sigma_X^2)$
  - $V = k + X \sim N(k + \mu_X; \sigma_X^2)$
  - $V = X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y; \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$
  - $V = X - Y \sim N(\mu_X - \mu_Y; \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$  (Observe que é  $+$  na variância. Essa é uma fonte grande de erros!)

1) Dê um exemplo de sequência  $X_1, X_2, \dots$  tal que  $X_n \rightarrow 0$  em  $L^1$ , mas não em  $L^2$

Resp. a1)

Basta aplicar a definição de 1, tentando um 'passo inverso' para achar algum exemplo em que não funcione

- Seja a sequência definida por  $P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$  e  $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$  e  $P(X_n = k) = 0$  nos demais casos, dessa forma  $\mathbf{E}(|X_n - 0|^1) = \mathbf{E}(X_n) = \sum_{i=0}^{i=n} i \cdot P(X_n = i) = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , mas  $\mathbf{E}(|X_n - 0|^2) = \mathbf{E}(X_n^2) = \sum_{i=0}^{i=n} i^2 \cdot P(X_n = i) = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$

Resp. a2)

- UM EXEMPLO ERRADO! Seja a sequência definida por  $X_n \sim Normal(0, 1 + \frac{1}{n})$ , temos  $\mathbf{E}(X_n) = 0$ ,  $\mathbf{E}(X_n^2) = \sigma^2 + \mathbf{E}(X_n)^2 = 1 + \frac{1}{n} + 0 \rightarrow 1 \neq 0 \dots$  o que tem de errado aqui? usamos isso  $\mathbf{E}(X_n) = 0$ , mas na definição, é pedido a esperança do MÓDULO elevado a p, ou seja,  $\mathbf{E}(|X_n - 0|^1) > 0$  não satisfazendo as condições para ser  $L^1$ , esse é um tipo de erro muito fácil de cometer.

2) Sejam  $X_1, X_2, \dots$  v.a. i.i.d. Uniformes  $(0,1)$ . Mostre que  $n^{-X_n} \rightarrow 0$  em probabilidade, mas não quase certamente.

Resp.) para mostrar isso, temos que provar que as restrições descritas em 2 são válidas:

- Queremos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|n^{-X_n} - 0| < \epsilon) \rightarrow 1$ ,

Considere  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|n^{-X_n} - 0| < \epsilon)$ , uma observação importante é que  $X_n \in [0, 1]$ ,

Podemos fazer transformações nos dois lados da desigualdade, considere a transformação logarítmica  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|n^{-X_n} - 0| < \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\ln(|n^{-X_n}|) < \ln(\epsilon)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(-X_n < \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|n|)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > -\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|n|)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|n|)}}^1 1 dx = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|n|)} = 1$

logo, converge em probabilidade.

- Agora vamos tentar mostrar que não converge quase certamente:

Considere  $\epsilon > 0$  e  $A_n = \{|n^{-X_n} - 0| > \epsilon\}$  disso temos que  $P(A_n) = P(|n^{-X_n}| > \epsilon) = P(\ln(|n^{-X_n}|) > \ln(\epsilon)) = P(X_n < -\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|n|)}) =$

$$\int_{x=0}^{x=-\log_{|n|}(\epsilon)} \mathbf{I}_{\{0 < x < \infty\}} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } -\log_{|n|}(\epsilon) < 0 \\ -\log_{|n|}(\epsilon) & \text{se } 0 \leq -\log_{|n|}(\epsilon) \leq 1 \\ 1 & \text{se } -\log_{|n|}(\epsilon) > 1 \end{cases}$$

Vamos calcular  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n=k} P(A_n) = -\log_1(\epsilon) - \log_2(\epsilon) - \log_3(\epsilon) - \dots$ , mas existe  $n_0$  tal que  $\epsilon \leq n_i^{-1}$  para todo  $n_i \geq n_0$ , logo  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n=k} \log_{|n|}(\epsilon) = -\log_1(\epsilon) - \log_2(\epsilon) - \log_3(\epsilon) - \dots \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^{n=k} 1 \rightarrow \infty$ , mostrando que a sequência denotada por  $n^{-X_n}$  não converge quase certamente.

3) Sejam  $X_1, X_2, \dots$  v.a. independentes,  $X_n \sim U(0, a_n)$ . Mostre que

a) Se  $a_n = n^2$ , então com probabilidade 1 somente um número finito de  $X_n$ 's toma valores menores que 1;

Resp. a)

Considere o evento  $A_n = \{X_n < 1\}$

$$\bullet P(A_n) = P(X_n < 1) = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{a_n} dx = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{n=\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = 2 < \infty \implies A_n \text{ ocorre um número finito de vezes}$$

b) Se  $a_n = \sqrt{n}$ , então com probabilidade 1 um número infinito de  $X_n$ 's toma valores menores que 1;

Resp. b)

Considere o evento  $A_n = \{X_n < 1\}$

$$\bullet P(A_n) = P(X_n < 1) = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{a_n} dx = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \sum_{n=1}^{n=\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty \implies A_n \text{ ocorre um número infinito de vezes}$$

4. Construa exemplos (diferentes dos dados na aula) que mostram que:

a) convergência em probabilidade não implica na convergência quase certa.

b) convergência em  $L^p$  não implica na convergência quase certa.

c) convergência quase certa não implica na convergência em  $L^p$ .

5) Sejam  $X_1, X_2, \dots$  v.a. i.i.d. Uniformes  $(0, 1)$  e sejam  $Y_n = \min X_1, \dots, X_n$ ,  $Z_n = \max X_1, \dots, X_n$ ,  $U_n = nY_n$ . Mostre que, quando  $n \rightarrow \infty$ ,

a)  $Y_n \rightarrow 0$ ,  $Z_n \rightarrow 1$  em probabilidade;

Resp. a)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - 0| \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\min X_1, \dots, X_n - 0| \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\min X_1, \dots, X_n \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\min X_1, \dots, X_n \geq \epsilon) \stackrel{\text{ind.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (P(X \geq \epsilon))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \epsilon)^n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - 1| \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\max X_1, \dots, X_n - 1| \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(1 - \max X_1, \dots, X_n \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\max X_1, \dots, X_n \leq 1 - \epsilon) \stackrel{\text{ind.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_1 \leq 1 - \epsilon)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \epsilon)^n = 0$

b)  $U_n \rightarrow \exp(1)$  em distribuição

Resp. b)

- Queremos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(a) = F_{\exp(1)}(a)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n \leq a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(nY_n \leq a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq a/n) = \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > a/n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\min X_1, \dots, X_n > a/n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_1 > \\ &a/n)^n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{a}{n})^n \stackrel{6}{=} 1 - e^{-a} = \int_{-\infty}^a 1 \cdot e^{-1 \cdot u} du = F_{\exp(1)}(a) \end{aligned}$$

6) Ache o limite (quase certo) da sequência  $Y_1, Y_2, \dots$  onde  $Y_n = \frac{1}{n}(X_1^\alpha + \dots + X_n^\alpha)$ ,  $X_1, X_2, \dots$  são i.i.d. Uniformes  $(0, 1)$  e  $\alpha > 0$ .

Resp.) Considere a variável aleatória  $V_n = X_n^\alpha$ , observe que  $\mathbf{E}(V_n) = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1} < \infty$ , logo, pelo teorema de Kolmogorov (8) a soma definida como  $S_n = \frac{1}{n}(V_1 + V_2 + \dots + V_n)$  satisfaz  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$ , mas  $Y_n = \frac{S_n}{n}$  logo, por (8), mostrei que  $Y_n \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\alpha+1}$

7) Sejam  $X_1, X_2, \dots$  v.a. i.i.d. com  $\mathbf{E}(X_i) = \text{Var}(X_i) = 1$ . Mostre que

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resp. ) vamos usar (9).

Considere  $U_n = \frac{\sum X_i}{n}$ , como  $\mathbf{E}(X_i) < \infty$  então  $U_n \xrightarrow{q.c.} 1$

Considere  $W_n = \frac{\sum X_i^2}{n}$ , como  $\mathbf{E}(X_i^2) = \text{Var}(X_i) + 1^2 = 2 < \infty$  então  $W_n \xrightarrow{q.c.} 2$

Considere  $V_n = \frac{\sqrt{n \sum X_i^2}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n \sum X_i^2}}{n} = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n}} = \sqrt{W_n} \xrightarrow{q.c.} \sqrt{2}$  por (9).

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}} = \frac{1/n}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} X_i = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{n}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}{n}}} = \frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

8) As v.a.  $X_1, X_2, \dots$  são independentes,  $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = 1/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Mostre que:

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n} X_k}{n^2} \xrightarrow{Prob.} 0$$

Resp.) Vamos apelar. Observe que é muito mais fácil mostrar que converge quase certamente do que em probabilidade e como convergência quase certa implica em convergência em probabilidade, temos o resultado esperado:

- $\mathbf{E}(X_i) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2} = 0$
- $Var(X_i) = \mathbf{E}(X_i^2) - \mathbf{E}(X_i)^2 = \mathbf{E}(X_i^2) = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = n^2$
- Considere a Variável aleatória  $Y_i = \frac{X_i}{n}$ , temos  $P(Y_i = 1) = P(X_i = n) = P(X_i = -n) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$
- Com isso, temos  $\mathbf{E}(Y_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  e  $Var(Y_i) = \mathbf{E}(Y_i^2) - \mathbf{E}(Y_i)^2 = \mathbf{E}(Y_i^2) = \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} = 1 < \infty$ , além disso  $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{Var(Y_k)}{n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n^2} \rightarrow 2 < \infty$ . Podemos usar o teorema de Kolmogorov (8) e  $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} Y_k}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$ , mas  $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} Y_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} X_k}{n^2}$  logo  $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} X_k}{n^2} \xrightarrow{q.c.} 0$  e disso temos que  $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} X_k}{n^2} \xrightarrow{Prob.} 0$

9) A cada aposta, o jogador perde 1 R\$ com probabilidade 0.7, perde 2 R\$ com probabilidade 0.2 ou ganhe 10 R\$ com probabilidade 0.1. Calcule (aproximadamente) a probabilidade de que este jogador estará perdendo depois de 100 apostas (ganho negativo).

Resp.)

- temos que:  $P(X = -1) = 0,7; P(X = -2) = 0,2; P(X = +10) = 0,1$
- $\mathbf{E}(X) = -0,7 - 2 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,1 = -0,1$
- $Var(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = (-1)^2 \cdot 0,7 + (-2)^2 \cdot 0,2 + (10)^2 \cdot 0,1 - 0,1^2 = 11,49$
- Considere  $S_{100} = \sum_{n=1}^{n=100} X$
- Usando o Teorema do Limite central (10), temos que  $P(S_{100} \leq 0) = P\left(\frac{S_{100} - n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}} \leq \frac{-n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}}\right) = \phi\left(\frac{-n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}}\right) = \phi\left(\frac{-100 \cdot 0,1}{\sqrt{11,49 \cdot 100}}\right) = \phi(0,295) \cong 0,6141$

10) O número dos dias que uma certa componente funciona até falhar é uma v.a. com densidade  $f(x) = 2x$ ,  $0 < x < 1$ . A componente que falha é repostada imediatamente. Quantas componentes precisamos ter no estoque para que a probabilidade de que o estoque vai durar pelo menos 35 dias seja 0.95?

Resp.)

- $\mathbf{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$
- $Var(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$
- $P(S_n \geq 35) = P\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}} \geq \frac{35 - n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}}\right) \cong 1 - \phi\left(\frac{35 - n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}}\right) = 0,95$
- Assim:  $\phi\left(\frac{35 - n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}}\right) = 0,05 \implies \frac{35 - n \cdot \mu}{\sqrt{Var(X) \cdot n}} = -2,57 \implies n = 54,07 \cong 55$  Componentes

11) Os engenheiros civis acreditam que o peso (em toneladas) que uma certa ponte pode suportar sem sofrer danos estruturais tem distribuição Normal com média 200 e desvio padrão 20. Suponha que o peso de um carro é uma v.a. (não necessariamente Normal) com média 1 e desvio padrão 0.2. Quantos carros podem passar simultaneamente por esta ponte sem que a probabilidade de danos estruturais exceda 0.01?

Resp. )

- $P \sim N(200; 20^2)$  - peso que a ponte pode suportar antes de sofrer danos estruturais
- $C_i$  é o peso de um carro qualquer, tal que  $\mu = \mathbf{E}(C_i) = 1$ ;  $\sigma^2 = Var(C_i) = 0,2^2$
- Considere a variável aleatória  $N_n = \sum_{i=1}^{i=n} C_i$
- Pelo TLC (10) temos que  $\frac{N_n - n \cdot \mathbf{E}(C_i)}{\sqrt{Var(C_i) \cdot n}} \sim N(0, 1) \implies N_n \sim N(n \cdot \mu; n \cdot \sigma^2)$
- Queremos  $P(N_n \geq P) = P(N_n - P \geq 0) \leq 0,01$ , mas ambas as variáveis são aproximadamente normais, podemos aplicar subtração de normais: Considere  $V_n = N_n - P \sim N(n \cdot \mu - 200; n \cdot \sigma^2 + 20^2)$ , para simplificar as manipulações, considere também  $k = n \cdot \mu - 200$  e  $w = n \cdot \sigma^2 + 20^2$ . Dessa forma, queremos  $P(V_n \geq 0) \leq 0,01$  com  $V_n \sim N(k; w)$ .

- Agora vamos manipular:  $P(V_n \geq 0) = 1 - P(V_n < 0) = 1 - P\left(\frac{V_n - k}{\sqrt{w}} < \frac{0 - k}{\sqrt{w}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{-k}{\sqrt{w}}\right) = 1 - (1 - \phi\left(\frac{k}{\sqrt{w}}\right)) = \phi\left(\frac{k}{\sqrt{w}}\right) < 0,01$ . Observe que a transformação  $\frac{V_n - k}{\sqrt{w}}$  é a que faríamos para transformar uma variável normal na forma padrão.
- disso temos  $\phi\left(\frac{k}{\sqrt{w}}\right) < 0,01 \implies \frac{k}{\sqrt{w}} < -2,326 \implies \frac{n \cdot \mu - 200}{\sqrt{n \cdot \sigma^2 + 20^2}} = \frac{n \cdot 1 - 200}{\sqrt{n \cdot 0,04 + 20^2}} < -2,326 \implies n \cong 153$  Carros.

12) As notas dos alunos do curso de estatística tem média 7,4 e desvio padrão 1,4 (suponha que as notas são v.a. independentes). O professor vai dar duas provas, uma para turma de 25 alunos e outra para uma turma de 64 alunos. Calcule (aproximadamente):

- Para esse problema temos:  $\mu = \mathbf{E}(X_i) = 7,5$ ;  $\sigma = 1,4$ ;  $X_i$  iid;  $C_1 = 25$  Alunos;  $C_2 = 64$  Alunos;  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

a) A probabilidade de que a nota média da turma seja pelo menos 8.0 (para as duas turmas);

Resp. a)

Queremos:

1.  $P\left(\frac{S_{25}}{25} \geq 8\right) = P\left(\frac{S_{25} - 25\mu}{\sigma\sqrt{25}} \geq \frac{25 \cdot 8 - 25\mu}{\sigma\sqrt{25}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{25 \cdot 8 - 25\mu}{\sigma\sqrt{25}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{25 \cdot 8 - 25 \cdot 7,5}{1,4 \cdot \sqrt{25}}\right) = 1 - \phi(2,14) = 1 - 0,9838 \cong 0,016$
2.  $P\left(\frac{S_{64}}{64} \geq 8\right) = P\left(\frac{S_{64} - 64\mu}{\sigma\sqrt{64}} \geq \frac{64 \cdot 8 - 64\mu}{\sigma\sqrt{64}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{64 \cdot 8 - 64\mu}{\sigma\sqrt{64}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{64 \cdot 8 - 64 \cdot 7,5}{1,4 \cdot \sqrt{64}}\right) = 1 - \phi(3,428) \cong 0,0003$

b) A probabilidade de que a nota média da turma maior exceda a nota média da turma menor em pelo menos 0.22.

Resp. b)

Queremos  $P\left(\frac{S_{64}}{64} \geq \frac{S_{25}}{25} + 0,22\right)$

- Como pelo TLC:  $\frac{\sqrt{64}}{\sigma} \cdot \left(\frac{S_{64}}{64} - \mu\right) \xrightarrow{d} N(0;1)$  então  $\frac{S_{64}}{64} \xrightarrow{d} N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{64}\right)$ ; da mesma forma  $\frac{\sqrt{25}}{\sigma} \cdot \left(\frac{S_{25}}{25} - \mu\right) \xrightarrow{d} N(0;1)$  então  $\frac{S_{25}}{25} \xrightarrow{d} N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{25}\right)$
- Denote  $Y = \frac{S_{64}}{64} - \frac{S_{25}}{25}$  pelo TLC  $Y \sim N\left(0; \frac{\sigma^2}{64} + \frac{\sigma^2}{25}\right)$  e queremos  $P(Y \geq 0,22)$ , como  $Y$  é aproximadamente uma Normal, vamos fazer a transformação  $Z = \frac{Y - 0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{64} + \frac{\sigma^2}{25}}} \sim N(0;1)$  assim nosso trabalho se resume a calcular  $P\left(Z \geq \frac{0,22}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{64} + \frac{\sigma^2}{25}}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{0,22}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{64} + \frac{\sigma^2}{25}}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{0,22}{\sigma \cdot 0,2358}\right) = 1 - \phi\left(\frac{0,22}{1,4 \cdot 0,2358}\right) = 1 - \phi(0,6664) = 1 - 0,430 = 0,57$



13) Um dado honesto é lançado até que a soma dos resultados exceda 300. Qual é a probabilidade de que serão necessários pelo menos 80 lançamentos?

Resp. ) Aqui temos que perceber que a probabilidade de em 80 ou mais lançamentos para alcançarmos soma maior que 300 equivale a probabilidade de em exatamente 79 lançamentos não termos alcançado soma 300, assim

- $P(\sum_{i=1}^{i=79} N_i \leq 300) = P(\frac{\sum_{i=1}^{i=79} N_i - 79 \cdot \mu}{\sqrt{79 \cdot \sigma^2}} \leq \frac{300 - 79 \cdot \mu}{\sqrt{79 \cdot \sigma^2}}) = \Phi(\frac{300 - 79 \cdot \mu}{\sqrt{79 \cdot \sigma^2}})$
- Sabemos que nossas variáveis aleatórias  $N_i \sim U(1, 6)$  discreta logo  $\mu = 3,5$  e  $\sigma^2 = \frac{35}{12}$  ( $Var(U) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$ )
- Com isso:  $P(\sum_{i=1}^{i=79} N_i \leq 300) = \Phi(\frac{300 - 79 \cdot 3,5}{\sqrt{79 \cdot (35/12)}}) = \Phi(1,548) = 0.93919$

14) Um dado honesto é lançado 43 vezes. Calcule a probabilidade aproximada que a média geométrica dos resultados é pelo menos 2,33. Obs.: a média geométrica de  $a_1, \dots, a_n$  é  $(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}$ .

Resp. )

O truque aqui é usar logaritmo para transformar os valores a ser calculados.

- Observe que  $\ln$  é crescente e como o valor mínimo do dado é 1, então  $\ln(1) = 0$  nesse caso (não precisamos nos preocupar com valores negativos de logaritmo  $\setminus 0/$ ), agora ficou fácil
- $P((a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n} \geq 2,33) = P(\ln((a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}) \geq \ln(2,33)) = P(\frac{1}{n} \cdot \ln(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) \geq \ln(2,33)) = P(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \ln(a_i) \geq \ln(2,33))$
- Sabemos que  $a_i \sim U(1, 6)$  discreta, sabemos que  $\mathbf{E}(\ln(a_i)) = \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\ln(i)}{6} = 1,0965$  e  $\mathbf{E}(\ln(a_i)^2) = \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\ln(i)^2}{6} = 1,5683$  com isso temos que  $\sigma^2 = \mathbf{E}(\ln(a_i)^2) - \mathbf{E}(\ln(a_i))^2 = 1,5683 - 1,0965^2 = 0,366$ ; podemos calcular também  $\ln(2,33) = 0,845868268$
- $P((a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n} \geq 2,33) = P(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \ln(a_i) \geq \ln(2,33)) = 1 - P(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \ln(a_i) < \ln(2,33)) = 1 - \Phi(\frac{n \cdot \ln(2,33) - n \cdot 1,0965}{\sqrt{0,366 \cdot n}}) = 1 - \Phi(\frac{43 \cdot \ln(2,33) - 43 \cdot 1,0965}{\sqrt{0,366 \cdot 43}}) =$
- $1 - \Phi(-2.7166) = \Phi(2.7166) = 0.99670$

15) Sejam  $X_1, X_2, \dots$  v.a. i.i.d. com  $\mathbf{E}(X_1) = 0$  e  $\mathbf{E}(X_1^2) = 2$ . Ache o limite em distribuição da sequência  $Y_1, Y_2, \dots$ , onde

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}$$

Resp. )

Sabemos que  $X_i$  tem esperança e segundo momento finitos, sabemos também a variância ( $\sigma^2 = \mathbf{E}(X_i^2) - \mathbf{E}(X_i)^2 = \mathbf{E}(X_i^2) = 2$ ). Que cai como uma luva para o Teorema de Kolmogorov (8), já que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty$ .

Primeiro, vamos reescrever a sequência de uma forma mais adequada  $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}$  aqui temos duas subsequências convergentes:

$\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2} = \sqrt{\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n}} \xrightarrow{q.c.} \sqrt{2}$  (Teo. Kolmogorov) e  $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{distr.} N(0; 1)$  (TLC) sabemos que  $\sigma = \sqrt{2}$  logo  $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{distr.} N(0; 2)$ . Dessa forma  $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2} \xrightarrow{distr.} \sqrt{2} \cdot N(0; 2) = N(0; 4)$ .

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012.  
Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o erro em nosso grupo de discussão:

<https://groups.google.com/forum/?fromgroups#!forum/me310-2s-2012>

Bons estudos,  
Eric.